ABSTRAK

Grup pada beberapa Irisan Kerucut ini memperlihatkan hubungan antara Aljabar dan Geometri. Adapun materi dari Aljabarnya ialah Grup dan dari Geometrinya berupa Irisan Kerucut. Grup pada beberapa Irisan Kerucut ini adalah suatu grup dihedral dan Irisan Kerucutnya meliputi Parabola, Hiperbola dan Lingkaran.

Grup dihedral adalah grup yang dihasilkan oleh dua generator yaitu a dan b dengan hubungan $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba = a^{n-1}b$ atau $ba^{n-1} = ab$, dengan e adalah elemen identitas. Dalam grup pada parabola dan hiperbola, persamaan parabola dan hiperbolanya dinyatakan sebagai persamaan parameter. Generator-generator yang akan membentuk grup dihedral pada parabola dan hiperbola berupa suatu fungsi parameter dengan syarat bahwa fungsi-fungsi tersebut berperiode dua yaitu merupakan suatu involusi. Grup yang dihasilkan oleh dua elemen berperiode dua adalah suatu grup dihedral. Dalam grup pada lingkaran fungsi-fungsi tersebut disajikan sebagai pemetaan titik potong kedua suatu garis dengan lingkaran.

Dalam grup pada parabola dan hiperbola, fungsi-fungsi yang digunakan fungsi parameter t antara lain f(t) sama dengan $-\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\frac{t}{t-1}$ $(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, $-t$. Jika komposisi dari dua fungsi tersebut di atas mempunyai periode dua, maka pada parabola atau hiperbola dihasilkan grup dihedral D_2 demikian juga jika komposisi dari dua fungsi itu berperiode n maka pada parabola atau hiperbola dihasilkan grup dihedral D_n. Dan jika komposisi dari dua fungsi itu berperiode tak hingga maka dihasilkan grup dihedral D_∞ .

Fungsi-fungsi parameter yang digunakan, masing-masing mempunyai keistimewaan. Misalnya fungsi $f(t) = -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, keistimewaannya bahwa setiap titik pada parabola akan ditransformasikan ke titik lain pada parabola oleh fungsi tersebut dan garis penghubung kedua titik tersebut melalui fokus. Tetapi pada hiperbola fungsi tersebut mempunyai keistimewaan lain yaitu bahwa setiap titik pada hiperbola akan ditransformasikan ke titik lain pada hiperbola dan garis penghubung kedua titik tersebut mempunyai gradien 1.

Dalam grup pada lingkaran ditentukan fungsi-fungsi f dan g. Diberikan titik-titik F dan G, fungsi f memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari FA dengan lingkaran tersebut. Demikian juga fungsi g memetakan suatu titik A pada lingkaran ke titik potong kedua dari GA dengan lingkaran tersebut. Titik-titik F dan G dapat berada di dalam maupun di luar lingkaran. Jika titik-titik F dan G di berhingga dan titik F terletak pada garis kutub titik G maka pada lingkaran akan terjadi grup dihedral D_2. Untuk titik F dan titik G yang berada di jauh tak hingga, grup dihedral yang terjadi tergantung dari besar sudut yang diapit oleh arah-arah yang ditentukan oleh F dan G. Grup dihedral D_n terjadi, jika arah-arah itu mengapit sudut $\frac{360°}{2n}$, misalnya terjadi D_3 jika arah-arah yang ditentukan oleh F dan G mengapit sudut sebesar 60°. Dan grup dihedral D_∞ pada lingkaran terjadi jika arah-arah yang ditentukan oleh F dan G mengapit sudut yang besarnya bukan pembagi bulat dari 360°.

ABSTRACT

Groups on conic sections show a relationship between Algebra and Geometry, groups is a topic in Algebra and conic sections is that of Geometry. The conic sections are parabolas, hyperbolas and circles and the groups on them are dihedral groups.

A dihedral group is a group generated by two elements a and b with defining relations $a^n = e$, $b^2 = e$, $ba^{n-1} = ab$ or $ba = a^{n-1}b$ and e is the identity element. To get the groups on parabolas and hyperbolas, these conic sections are presented by parametric equations. The generators of the group are parametric functions of period two or involutions. A Group generated by two elements of period two is a dihedral group. The groups on circles are generated by functions defined by determining the second intersection of a line through a point and the circle.

The functions used to get the groups on parabolas and hyperbolas are parametric functions in t, for instance

f(t) is equal to $-\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, $\dfrac{t}{t-1}$

$(t - 1 \neq 0)$, $1 - t$, or $-t$. If the composition of two of those functions is of periode two, than the dihedral group generated by those functions on the parabolas and hyperbolas is the dihedral group D_2. If the composition of two of those functions is of periode n it will give the dihedral group D_n. And naturally if the composition of two of those functions is of infinite period, the dihedral group will be D_∞ .

Each of the parametric functions used has its

speciality. For example if $f(t) = -\dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, then

a point Q on a parabola will be transformed to Q´, such that the line QQ´ passes through the focus. But a point S on a hyperbola will be transformed to S´, such that the gradient of the line SS´ is one.

Groups on circles are generated by two functions f and g. The function f(or g) transforms a point A on the circle to the second intersection of $\overleftrightarrow{FA}$ (or $\overleftrightarrow{GA}$) with the circle. The points F and G may lie inside or outside the circle or at infinity. For example if F lies on the polar line of G with respect to the circle, than the group on the circle will be D_2. If F and G are at infinity, then the group generated depends on the directions determined by F and G. If the measure of the angle between the directions determined by F and G is $\frac{360}{2n}$ then it will give the dihedral group D_n. For example if the measure of the angle determined by F and G is 60 it will give the dihedral group D_3 and if the measure of the angle is incommonsurate with 360, the group on the circle will be the infinite dihedral group D_∞ .